

15

Systemy liczbowe stosowane w informatyce

ZAGADNIENIA

Charakterystyka pozycyjnego zapisu liczb ■ Systemy liczbowe stosowane w informatyce

Systemem liczbowym nazywa się sposób zapisywania liczb i zbiór reguł umożliwiających wykonywanie działań na tych liczbach.

Systemy liczbowe dzieli się na:

1. **Addytywne**, w których zapis wartości liczby oblicza się przez dodanie kolejnych cyfr (symboli).

PRZYKŁAD 15.1

$$XII = 10 + 1 + 1 = 12$$

2. **Pozycyjne**, w których zapis wartości liczby zależy od wagi pozycji, na której zapisano kolejną cyfrę (symbol). Wagę pozycji określają kolejne potęgi podstawy systemu liczbowego. Wartość liczby uzyskuje się po zsumowaniu poszczególnych iloczynów wag i cyfr danych pozycji. Jeżeli przez n oznaczy się numer kolejnej pozycji w zapisie, przez p podstawę systemu liczbowego, a przez c cyfrę lub symbol stosowany w danym systemie, to wartość liczby W_p oblicza się ze wzoru:

$$W_p = c_n \cdot p^n + \dots + c_3 \cdot p^3 + c_2 \cdot p^2 + c_1 \cdot p^1 + c_0 \cdot p^0$$

PRZYKŁAD 15.2

$$561_{(10)} = 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 500 + 60 + 1$$

Rodzaje systemów liczbowych stosowanych w informatyce

System dwójkowy (binarny)

Nazwa systemu	Podstawa systemu	Zakres symboli	Skrót nazwy	Oznaczenie liczby w systemie
dwójkowy (binarny)	2	0, 1	BIN	$(1101)_2$, $(1101)_B$ 1001_2 , $1001_{(2)}$

Dwójkowy system liczbowy (ang. *binary*) to pozycyjny system liczbowy, którego podstawą jest liczba 2. Oznacza to, że do zapisu liczb są potrzebne tylko dwie cyfry: 0 i 1. Idealnie nadaje się do zapisu liczb przetwarzanych przez cyfrowe układy scalone. Dlatego przyjęło się jako podstawowy język poziomu maszynowego w informatyce.

Zapis liczby w pozycji jest kol

Waga pozycji

Wartość

PRZ

$$1101_{(2)} = 1$$

Jak łatwo w systemie

System dzie

Nazwa sy

dziesiętny arabski (decymal

Dziesięć stanowi li podstawo informacj (np. adres Zapis l pozycji je

System ó

Nazwa

ósemko (oktaln

Ósem stanowi ósemko jące pra dostępu Zapi danej p

Zapis liczby w systemie binarnym to określonej długości szereg zer i jedynek. Wagą danej pozycji jest kolejna potęga liczby 2.

Waga pozycji	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Wartość	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

PRZYKŁAD 15.3

$$1101_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 8 + 4 + 1 = 13_{(10)}$$

Jak łatwo zauważyć, obliczenie wartości binarnej jest jednocześnie jego konwersją na zapis w systemie dziesiętnym.

System dziesiętny (decymalny)

Nazwa systemu	Podstawa systemu	Zakres symboli	Skrót nazwy	Oznaczenie liczby w systemie
dziesiętny, arabski (decymalny)	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	DEC	$(465)_D$, $(675)_{10}$ 563_{10} , $876_{(10)}$

Dziesiętny system liczbowy (ang. *decimal*) to pozycyjny system liczbowy, którego podstawę stanowi liczba 10. Oznacza to, że do zapisu liczb można korzystać z dziesięciu cyfr (0–9). Jest to podstawowy, powszechnie stosowany na całym świecie system liczbowy. Jeżeli otrzymuje się informację liczbową z systemu komputerowego, jest ona zazwyczaj podawana w notacji dziesiętnej (np. adres IP: 192.168.11.1).

Zapis liczby w systemie dziesiętnym to określonej długości szereg cyfr (od 0 do 9). Wagą danej pozycji jest kolejna potęga liczby 10.

System ósemkowy (oktalny)

Nazwa systemu	Podstawa systemu	Zakres symboli	Skrót nazwy	Oznaczenie liczby w systemie
ósemkowy, (oktalny)	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	OCT	$(465)_8$, $(675)_O$ 563_8 , $176_{(8)}$

Ósemkowy system liczbowy (ang. *octal*) to pozycyjny system liczbowy, którego podstawę stanowi liczba 8. Oznacza to, że do zapisu liczb można korzystać z ośmiu cyfr (0–7). System ósemkowy stosuje się w informatyce, przykładowo w systemie Linux polecenie **chmod** ustawiające prawa dostępu do pliku może przyjąć jako argument oktalną reprezentację żądanych praw dostępu, np. **chmod 755 plik.txt**.

Zapis liczby w systemie ósemkowym to określonej długości szereg cyfr (od 0 do 7). Wagą danej pozycji jest kolejna potęga liczby 8.



PRZYKŁAD 15.4

$$301_{(8)} = 1 \cdot 8^0 + 0 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 8 + 3 \cdot 64 = 1 + 0 + 192 = 193_{(10)}$$

Przedstawiona metoda obliczenia wartości ósemkowej jest jednocześnie jego konwersją na zapis w systemie dziesiętnym.

System szesnastkowy (heksadecymalny)

Nazwa systemu	Podstawa systemu	Zakres symboli	Skrót nazwy	Oznaczenie liczby w systemie
szesnastkowy (heksadecymalny)	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F	HEX	$(4A5)_{16}$, $(F75)_{16}$, $56B_{16}$, $19A_{(16)}$

Szesnastkowy system liczbowy (ang. *hexadecimal*) to pozycyjny system liczbowy, którego podstawę stanowi liczba 16. Oznacza to, że do zapisu liczb można korzystać z dziesięciu cyfr (0–9) i sześciu liter (od A do F). System szesnastkowy stosuje się w informatyce, przykładowo do podawania adresów IPv6, MAC adresów kart sieciowych i kodowania barwy w języku HTML.



PRZYKŁAD 15.5

$$1F1_{(16)} = 1 \cdot 16^0 + 15 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^2 = 1 \cdot 1 + 15 \cdot 16 + 1 \cdot 256 = 1 + 240 + 256 = 497_{(10)}$$

Przedstawiona metoda obliczenia wartości szesnastkowej jest jednocześnie jego konwersją na zapis w systemie dziesiętnym.



SPRAWDŹ SWOJE UMIEJĘTNOŚCI

1. Wyszukaj w dostępnych źródłach informacji o innych systemach liczbowych stosowanych przez człowieka.
2. Znajdź na domowych urządzeniach sieciowych przykłady wykorzystania systemów liczbowych.



SPRAWDŹ SWOJĄ WIEDZĘ

1. Czym różni się pozycyjny zapis liczb od addytywnego?
2. Jakie zastosowanie w informatyce ma system heksadecymalny?
3. Dlaczego liczbowy system binarny często nazywa się językiem maszynowym?

16

Przeliczanie liczb zapisanych w różnych systemach liczbowych

ZAGADNIENIA

- Przeliczanie liczb we wszystkich poznanych systemach liczbowych

Przeliczanie liczb z systemu dziesiętnego na binarny

Przeliczenie liczby dziesiętnej na dwójkową można przeprowadzić dwoma sposobami. Pierwszy polega na tym, że liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym, którą chcemy przekonwertować na system binarny, należy podzielić przez podstawę systemu binarnego, czyli 2, sposobem pisemnym. Jeżeli z dzielenia pozostanie jedynek jako reszta, zapisujemy ją w słupku. Jeżeli reszty nie będzie, zapisujemy 0. Kontynuujemy dzielenie, aż wynikiem dzielenia będzie zero. Zapis cyfr reszty z dzielenia, czytany od dołu, określi zapis liczby w systemie binarnym.

PRZYKŁAD 16.1

Przeliczamy liczbę $256_{(10)}$ na system binarny:

256 : 2	0
128 : 2	0
64 : 2	0
32 : 2	0
16 : 2	0
8 : 2	0
4 : 2	0
2 : 2	0
1 : 2	1
0	

$100000000_{(2)}$

Wynikiem konwersji będzie liczba $100000000_{(2)}$

Drugi sposób polega na wybraniu odpowiednich wag (wartości potęg liczby 2) tak, aby ich suma była równa wartości liczby przekształcanej. Wybieranie zaczynamy od wagi, która jest sumą mniejszą od liczby przekształcanej. W miejsce odpowiadające wybranej wadze wstawiamy cyfrę 1. Jeśli dana waga nie zostanie wybrana (suma dotychczas wybranych wag i wagi bieżącej jest większa od liczby zamienianej na postać dwójkową), w miejsce to wstawiamy cyfrę 0.



PRZYKŁAD 16.2

Aby przekształcić zapis liczby $720_{(10)}$, należy posłużyć się wartościami z tabeli.

Wagi	210	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
Liczba w systemie dwójkowym	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
Sumowanie wag		512		128	64		16				

Stąd $512 + 128 + 64 + 16 = 720$, czyli $720_{(10)} = 01011010000_{(2)}$

Przeliczanie liczb z systemu dwójkowego na ósemkowy i z ósemkowego na dwójkowy

Ułatwieniem przy tego rodzaju konwersji będzie określenie słowa bitowego, za którego pomocą można zapisać każdą cyfrę systemu ósemkowego. Taką zależność przedstawiono w tabeli 16.1.

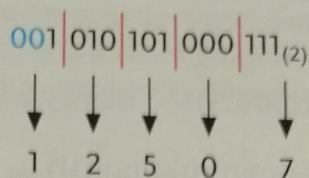
Tabela 16.1. Zapis podstawowych cyfr systemu ósemkowego w notacji binarnej

Liczba w systemie dwójkowym	Liczba w systemie ósemkowym
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Aby zamienić liczbę dwójkową na ósemkową, trzeba wszystkie jej cyfry podzielić na grupy po trzy bity – od prawej do lewej strony. Następnie każdą otrzymaną grupę trzech cyfr systemu dwójkowego należy zamienić na odpowiadającą im jedną cyfrę systemu ósemkowego.

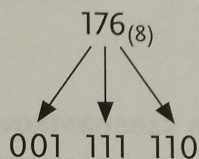
PRZYKŁAD 16.3

Aby przekształcić zapis liczby $1010101000111_{(2)}$, należy wykonać następujące działania:



Jeżeli brakuje zer przy zapisie cyfry po lewej stronie, można je uzupełnić. Nie zmieni to wartości liczby. Zatem $1010101000111_{(2)} = 12507_{(8)}$.
Konwersja w drugą stronę wygląda analogicznie. Zamieniamy cyfry na kolejnych pozycjach liczby ósemkowej na trzybitowe zapisy binarne.

PRZYKŁAD 16.4



Liczba $176_{(8)}$ to $1111110_{(2)}$.

Przeliczanie liczb z systemu dwójkowego na szesnastkowy i z szesnastkowego na dwójkowy

Ułatwieniem w tego rodzaju konwersji będzie określenie słowa bitowego, za którego pomocą można zapisać każdą cyfrę systemu szesnastkowego. Taką zależność przedstawiono w tabeli 16.2.

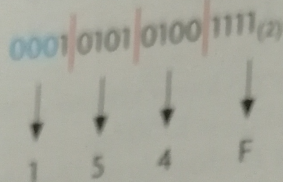
Tabela 16.2. Zapis podstawowych cyfr systemu szesnastkowego w notacji binarnej

Liczba w systemie dwójkowym	Liczba w systemie szesnastkowym	Liczba w systemie dwójkowym	Liczba w systemie szesnastkowym
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Aby zamienić liczbę dwójkową na szesnastkową, trzeba wszystkie jej cyfry podzielić na grupy po cztery bity – od prawej do lewej strony. Następnie każdą otrzymaną grupę czterech cyfr systemu dwójkowego należy zamienić na odpowiadającą im jedną cyfrę systemu szesnastkowego.

PRZYKŁAD 16.5

Aby przekształcić zapis liczby $1010101001111_{(2)}$, należy wykonać następujące działania:



Jeżeli brakuje zer przy zapisie cyfry po lewej stronie, można je uzupełnić. Nie zmieni to wartości liczby. Zatem $1010101001111_{(2)} = 154F_{(16)}$.
Konwersja w drugą stronę przebiega analogicznie jak przy systemie ósemkowym, z tą jednak różnicą, że kolejne symbole notacji szesnastkowej zamieniamy na ich czterobitowe odpowiedniki w systemie binarnym.

Przeliczanie liczb z systemu dziesiętnego na szesnastkowy i ósemkowy

Gdy przeliczamy liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym na ósemkowy, wykonujemy takie same czynności jak podczas przeliczania na system dwójkowy. Różnica jest taka, że dzielimy liczbę dziesiętną przez 8.

PRZYKŁAD 16.6

Aby przekształcić zapis liczby $233_{(10)}$, należy wykonać następujące działania:

$233 : 8 = 29$	reszty 1	↑ kierunek odczytywania
$29 : 8 = 3$	reszty 5	
$3 : 8 = 0$	reszty 3	

Zatem liczba $233_{(10)}$ w systemie ósemkowym to $351_{(8)}$.

Dla ułatwienia przy większych wartościach można przeliczyć najpierw liczbę z systemu dziesiętnego na dwójkowy, a następnie na ósemkowy.

Podczas przeliczania liczby z systemu dziesiętnego na szesnastkowy wykonujemy takie same czynności jak podczas przeliczania na system dwójkowy i ósemkowy. Różnica polega na tym, że dzielimy liczbę dziesiętną przez 16.

PRZYKŁAD 16.7

$466 : 16 = 29$	reszty 2	↑ kierunek odczytywania
$29 : 16 = 1$	reszty 13	
$1 : 16 = 0$	reszty 1	

Zatem liczba $466_{(10)}$ w systemie szesnastkowym to $1D2_{(16)}$.

Dla ułatwienia przy większych wartościach można przeliczyć najpierw liczbę z systemu dziesiętnego na dwójkowy, a następnie na szesnastkowy.

Przeliczanie liczb z systemów szesnastkowego i ósemkowego na dziesiętny

Aby dokonać konwersji liczb z systemu szesnastkowego, dwójkowego czy ósemkowego na dziesiętny, należy dodać kolejno wszystkie cyfry z każdej pozycji, pomnożone przez odpowiednią wagę tej pozycji. Przykłady przedstawiliśmy w rozdziale opisującym rodzaje systemów liczbowych.

SPRAWDŹ SVOJE UMIEJĘTNOŚCI

1. Adres fizyczny MAC karty sieciowej to 0F-1C-CA-28-9D-21. Zapisano go w systemie heksadecymalnym. Podaj jego zapis w ośmiobitowych modułach rozdzielonych kreską.
2. Zapisz w systemie binarnym rok swoich urodzin.
3. Zapisz adres IP 192.168.30.12 w notacji binarnej.

SPRAWDŹ SWOJĄ WIEDZĘ

1. Zamień na zapis w systemie dziesiętnym:
 - a) $100101011101_{(2)} =$
 - b) $10012_{(8)} =$
 - c) $FAA_{(16)} =$
 - d) $10101111_{(2)} =$
 - e) $100000000_{(2)} =$
2. Zamień na zapis w systemie dwójkowym:
 - a) $FFABC_{(16)} =$
 - b) $2021_{(10)} =$
 - c) $10324_{(10)} =$
 - d) $34271_{(8)} =$
 - e) $100101_{(8)} =$
3. Zamień na zapis w systemie ósemkowym:
 - a) $10010101111101_{(2)} =$
 - b) $1234_{(10)} =$
 - c) $999_{(10)} =$
 - d) $100000010000100001_{(2)} =$
 - e) $1000100111111011111101010111_{(2)} =$
4. Zamień na zapis w systemie szesnastkowym:
 - a) $10238157_{(10)} =$
 - b) $11010100100101001001001_{(2)} =$
 - c) $1999_{(10)} =$
 - d) $100000000000000000_{(2)} =$
 - e) $3452344_{(10)} =$

INF02 WsiP 2022, klekot T., Marciniuk T.